

### التمرين الأول ( نقطتان ونصف )

نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة بما يلي:  $u_0 = 1$  و  $u_{n+1} = \frac{u_n^3}{3u_n^2 + 1}$  لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$ .

(1) أ- بين أن  $u_n > 0$  لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$ . 0.5

ب- بين أن المتتالية  $(u_n)$  تناقصية. 0.5

ج- استنتج أن  $(u_n)$  متقاربة. 0.25

(2) أ- بين أن  $u_{n+1} \leq \frac{1}{3}u_n$  لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$ . 0.5

ب- استنتج أن:  $u_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$  لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$  ثم احسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ . 0.75

### التمرين الثاني (3 نقط ونصف)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

النقط  $A(1, 2, -2)$  و  $B(0, 3, -3)$  و  $C(1, 1, -2)$  والمستوى  $(P)$  الذي معادلته:  $x + y - 3 = 0$ .

(1) أ- احسب مسافة النقطة  $\Omega(0, 1, -1)$  عن المستوى  $(P)$ . 0.5

ب- استنتج أن معادلة ديكارتية للفلكة  $(S)$  التي مركزها  $\Omega(0, 1, -1)$  والمماسة للمستوى  $(P)$

$$\text{هي: } x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 2z = 0$$

(2) أ- حدد  $\overline{AB} \wedge \overline{AC}$  ثم استنتج أن النقط  $A$  و  $B$  و  $C$  غير مستقيمة. 0.75

ب- بين أن: معادلة ديكارتية للمستوى  $(ABC)$ :  $x - z - 3 = 0$ . 0.5

(3) أ- تحقق من الفلكة  $(S)$  مماسة للمستوى  $(ABC)$ . 0.25

ب- احسب المسافة  $\Omega C$  واستنتج نقطة تماس  $(S)$  والمستوى  $(ABC)$ . 0.5

### التمرين الثالث (3 نقط)

نعتبر في مجموعة الأعداد العقدية  $\mathbb{C}$  المعادلة التالية:  $2z^2 - 2iz - 1 = 0$  ( $E$ )

(1) أ- حل في  $\mathbb{C}$  المعادلة ( $E$ ). ( $z_1$  و  $z_2$  هما حلا المعادلة بحيث  $\text{Re}(z_1) > 0$ ). 0.75

ب- اكتب الحلين  $z_1$  و  $z_2$  على الشكل المثلثي. 0.5

(2) في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$

نعتبر النقط  $A$  و  $B$  و  $S$  التي ألقاها على التوالي هي:  $a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$  و  $b = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$  و  $s = i$ .

أ- اكتب على الشكل المثلثي العدد العقدي:  $\frac{a-s}{b-s}$ . 0.75

ب- استنتج أن المثلث  $SAB$  متساوي الساقين وقائم الزاوية في  $S$ . 0.5

ج- بين أن الرباعي  $OASB$  مربع. 0.5

### التمرين الرابع (3 نقط)

يحتوي كيس  $U_1$  على بيدقتين تحملان الرقم 1، وعلى أربع بيدقات تحمل الرقم 2 (لا يمكن التمييز بينها باللمس).

ويحتوي كيس  $U_2$  على ثلاث كرات حمراء وأربع كرات خضراء (لا يمكن التمييز بينها باللمس كذلك).  
نسحب عشوائياً بيدقة واحدة من الكيس  $U_1$ .

(1) أحسب احتمال الحدثان التاليان .  
A: " البيدقة المسحوبة تحمل الرقم 1 ."

B: " البيدقة المسحوبة تحمل الرقم 2 ."

(2) نعتبر في هذا السؤال التجربة العشوائية التالية .

نسحب بيدقة واحدة من الكيس  $U_1$  ونسجل رقمها:

- إذا كان هذا الرقم هو 1 نقوم بسحب كرة واحدة من الكيس  $U_2$ .

- وإذا كان هذا الرقم هو 2 نقوم بسحب كرتين في آن واحد من الكيس  $U_2$ .

ليكن  $n$  عدد الكرات الحمراء المسحوبة من الكيس  $U_2$

و  $E_2$  الحدث " الحصول بالضبط على  $n$  كرة حمراء "

$$\text{أ- بين أن: } p(E_1) = \frac{11}{21} \text{ و } p(E_2) = \frac{2}{21} .$$

ب- احسب احتمال الحدث A علماً أن الحدث  $E_1$  محقق.

### مسألة (8 نقط)

لتكن  $f$  الدالة العددية للمتغير الحقيقي  $x$  المعرفة بما يلي:  $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 2)$

و (C) هو المنحنى الممثل للدالة  $f$  في معلم متعامد ممنظم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

(1) أ- تحقق من أن:  $x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1$  لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$ .

ب- استنتج أن  $f$  معرفة على  $\mathbb{R}$  ثم احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

(2) بين أن:  $f(2-x) = f(x)$  لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$  ثم استنتج أن المستقيم الذي معادلته  $x=1$  محور

تماثل المنحنى (C).

(3) أ- تحقق من أن:  $f(x) = 2\ln(x) + \ln\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{2}{x^2}\right)$  لكل  $x$  من المجال  $[1, +\infty[$ .

ب- استنتج أن:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$  ثم أو هندسيا هذه النتيجة.

(4) أ- بين أن:  $f'(x) = \frac{2(x-1)}{(x-1)^2 + 1}$  لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$ .

ب- أعط جدول تغيرات الدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$ .

5) أ- بين أن:  $f''(x) = \frac{2x(2-x)}{[(x-1)^2+1]^2}$  لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$ . 0.5

ب- ادرس تقعر المنحنى (C). 0.5

6) أنشئ المنحنى (C). 0.75

7) ليكن  $h$  قصور الدالة  $f$  على المجال  $[1, +\infty[$

أ- بين أن  $h$  تقابل من المجال  $[1, +\infty[$  نحو مجال  $J$  يتم تحديده. 0.5

ب- حدد  $h^{-1}(x)$  لكل  $x$  من  $J$ . 0.5

8) أ- بوضع  $t = x-1$  بين أن:  $\int_0^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 \ln(1+t^2) dt$  0.5

ب- باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن:  $\int_{-1}^0 \ln(1+t^2) dt = \ln 2 - 2 \int_{-1}^0 \frac{t^2}{1+t^2} dt$  0.5

ج- بين أن:  $\int_{-1}^0 \frac{t^2}{1+t^2} dt = 1 - \frac{\pi}{4}$  ( لاحظ أن:  $\frac{t^2}{1+t^2} = 1 - \frac{1}{1+t^2}$  لكل  $t$  من  $\mathbb{R}$  ). 0.5

د- استنتج مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C) ومحور الأفاصيل 0.25

والمستقيمين اللذين معادلتاهما على التوالي  $x=0$  و  $x=1$

## الدورة الإستدراكية 2004

التمرين الأول:

(1) أ- من أجل  $n = 0 : U_0 = 1 > 0$  . نفترض أن  $U_n > 0$  إذن  $U_n^3 > 0$  ومنه  $U_{n+1} = \frac{U_n^3}{1+U_n^2} > 0$

وبالتالي  $U_n > 0$  لكل  $n$  من  $IN$  .

ب- لدينا  $U_{n+1} - U_n = \frac{-U_n^2(U_n+1)}{1+U_n^2} < 0$  إذن  $(U_n)$  تناقصية .

ج-  $(U_n)$  تناقصية و مصغرة ب  $0$  ، فهي إذن متقاربة .

(2) أ- لدينا  $3U_n^2 + 1 \geq 3U_n^2$  إذن  $\frac{U_n^3}{3U_n^2 + 1} \leq \frac{U_n^3}{3U_n^2}$  أي  $U_{n+1} \leq \frac{1}{3}U_n$  لكل  $n$  من  $IN$  .

$$\left. \begin{array}{l} U_n \leq \frac{1}{3}U_{n-1} \\ U_{n-1} \leq \frac{1}{3}U_{n-2} \\ \vdots \\ U_2 \leq \frac{1}{3}U_1 \\ U_1 \leq \frac{1}{3}U_0 \end{array} \right\} \text{ب- لدينا : } \left. \begin{array}{l} \text{نضرب طرفا بطرف (كل الأطراف موجبة) نجد} \\ U_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{array} \right\} \text{لـ } IN \text{ لكل } n$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0 \leftarrow -1 < \frac{1}{3} < 1$  ولدينا  $U_n > 0$  إذن  $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0$  .

التمرين الثاني :

(1) أ-  $d(\Omega, (P)) = \frac{|0+1-3|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

ب-  $S(\Omega, r)$  مماسة للمستوى  $(P)$  ، إذن  $r = \sqrt{2}$  ومنه  $(S): x^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 2$

إذن معادلة ديكرتية للفلكة هي :  $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 2z = 0$

(2) أ-  $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = -\vec{i} + \vec{k} \iff \overrightarrow{AB}(-1,1,-1)$  و  $\overrightarrow{AC}(0,-1,0)$

ب-  $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$  إذن النقط  $A$  و  $B$  و  $C$  غير مستقيمية .

ب- لدينا  $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$  منظمية على  $(ABC)$  ، إذن  $(ABC): -x + z + d = 0$

$(ABC): x - z - 3 = 0$  ومنه  $d = 3$  إذن  $B(0,3,-3) \in (ABC)$

SAID BOUZAWIT - lycée Abdelali Benchakroune

(3) أ- لدينا  $d(\Omega, (ABC)) = \frac{|0+1-3|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} = r$  إذن الفلكة  $(S)$  مماسة للمستوى  $(ABC)$ .

ب-  $\Omega C = \sqrt{2} \Leftarrow \overrightarrow{\Omega C}(1,0,-1)$  ولدينا  $C \in (ABC)$  و  $C \in (S)$  إذن  $C$  هي نقطة تماس  $(S)$  و  $(ABC)$ .  
إذن :

التمرين الثالث:

(1) أ-  $\Delta' = 1 \Leftarrow z' = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$  و  $z'' = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$  لدينا إذن  $\text{Re}(z'') > 0$  أي  $z' = z_2$  و  $z'' = z_1$ .

ب- لدينا  $z_2 = \left[ \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3\pi}{4} \right]$  و  $z_1 = \left[ \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4} \right]$

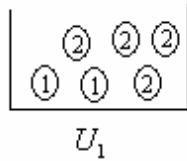
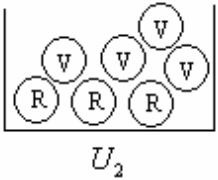
(2) أ- لدينا  $\frac{a-s}{b-s} = \frac{1-i}{-1-i} = i$  إذن  $\frac{a-s}{b-s} = \left[ 1, \frac{\pi}{2} \right]$

ب- لدينا  $\frac{SA}{SB} = \left| \frac{a-s}{b-s} \right| = 1$  إذن المثلث  $SAB$  متساوي الساقين رأسه  $S$ .

و  $\left( \overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB} \right) = \arg \left( \frac{a-s}{b-s} \right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$  يعني أن المثلث  $SAB$  قائم الزاوية في  $S$ .

ج- لدينا  $s = a + b$  يعني  $\text{aff}(S) = \text{aff}(A) + \text{aff}(B)$  ومنه  $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$  إذن الرباعي  $OASB$  متوازي الأضلاع ، و بما أن المثلث  $SAB$  قائم الزاوية و متساوي الساقين رأسه  $S$  فإن  $OASB$  مربع.

التمرين الرابع :



(1)  $p(A) = \frac{1}{3}$  و  $p(B) = \frac{4}{6}$

(2) أ-  $p(E_1) = \left( \frac{1}{3} \times \frac{3}{7} \right) + \left( \frac{2}{3} \times \frac{C_3^1 C_4^1}{C_7^2} \right) = \frac{1}{7} + \frac{8}{21} = \frac{11}{21}$

و  $p(E_2) = \frac{2}{3} \times \frac{C_3^2}{C_7^2} = \frac{2}{21}$

ب- لدينا  $p_{E_1}(A) = \frac{p(A \cap E_1)}{p(E_1)}$  و  $p(A \cap E_1) = p(A)p_A(E_1) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{7} = \frac{1}{7}$

إذن  $p_{E_1}(A) = \frac{3}{11}$

التمرين الخامس:

(1) أ- لدينا  $x^2 - 2x + 2 = x^2 - 2x + 1 + 1 = (x-1)^2 + 1$  لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$ .

ب-  $(x-1)^2 + 1 > 0$  لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$  إذن  $D_f = \mathbb{R}$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

(2) لدينا  $f(2-x) = 4 - 4x + x^2 - 4 + 2x + 2 = x^2 - 2x + 2 = f(x)$  إذن  $f(2-x) = f(x)$  لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$ .

الاستنتاج: المستقيم ذو المعادلة  $x = a$  محور تماثل  $(C)$  في  $M$   $(O, \vec{i}, \vec{j}) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} f(2a-x) = f(x)$  إذن : المستقيم ذو المعادلة  $x = 1$  محور تماثل  $(C)$ .

SAID BOUZAWIT - lycée Abdelali Benchakroune

أو : لدينا  $(C) M(x, y) \Leftrightarrow y = f(x)$  و لتكن  $M'(x', y')$  مماثلة  $M$  بالنسبة للمستقيم ذي المعادلة  $x = 1$  ،

إذن : 
$$\begin{cases} \frac{x+x'}{2} = 1 \\ y' = y \end{cases} \text{ وهذا يكافئ } \begin{cases} x' = 2-x \\ y' = y \end{cases} . \text{ و بما أن } f(2-x) = f(x) \text{ فإن } y' = f(x')$$

إذن  $M' \in (C)$  و بالتالي  $(C)$  متمائل بالنسبة للمستقيم ذي المعادلة  $x = 1$  .

(3) أ-  $f(x) = \ln \left[ x^2 \left( 1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} \right) \right] = \ln x^2 + \ln \left( 1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} \right)$  و بما أن  $x \in [1, +\infty[$

فإن  $\ln x^2 = 2 \ln x$  إذن  $f(x) = \ln \left[ x^2 \left( 1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} \right) \right] = 2 \ln x + \ln \left( 1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} \right)$

ب- لدينا  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \frac{\ln x}{x} + \frac{\ln \left( 1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} \right)}{x} = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$  و  $\frac{0}{+\infty} = 0$

إذن  $(C)$  يقبل فرعاً شلجيمياً في اتجاه محور الأفاصيل بجوار  $+\infty$  .

(4) أ-  $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \frac{(x^2 - 2x + 2)}{x^2 - 2x + 2} = \frac{2(x-1)}{(x-1)^2 + 1}$

ب-

$x$	$-\infty$	$1$	$+\infty$
$f'(x)$		$0$	
		$-$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$0$	$+\infty$

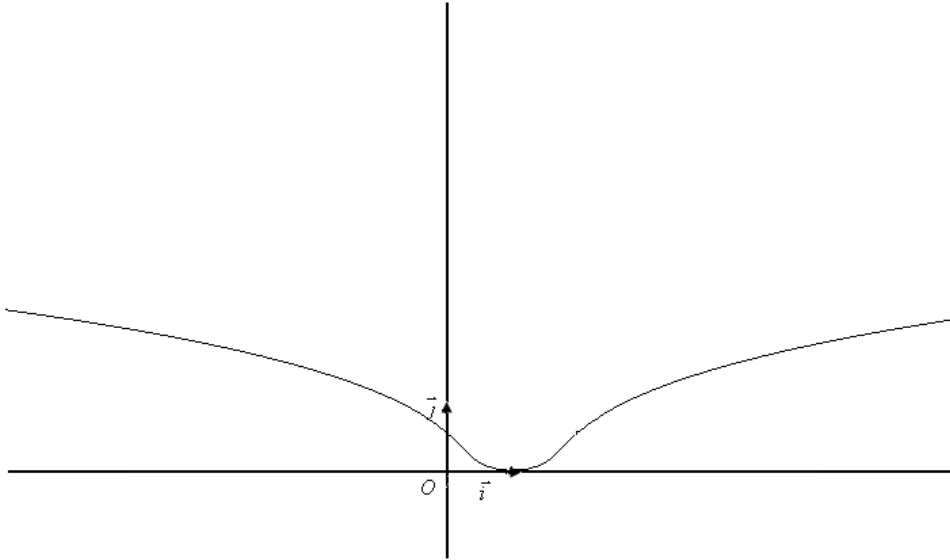
(5) أ-  $\forall x \in \mathbb{R} \quad f''(x) = \frac{2(x^2 - 2x + 2) - 4(x-1)^2}{[(x-1)^2 + 1]^2} = \frac{2x(2-x)}{[(x-1)^2 + 1]^2}$

ب- نلخص إشارة  $f''(x)$  في الجدول التالي :

$x$	$-\infty$	$0$	$2$	$+\infty$
$f''(x)$		$0$	$0$	
		$-$	$+$	$-$
$(C)$		$\text{A}$	$\text{B}$	
		$\text{P.I}$	$\text{P.I}$	

المنحنى له نقطتي انعطاف  $A(0, \ln(2))$  و  $B(2, \ln(2))$

(6) المنحنى



(7) أ-  $h$  متصلة وتزايدية قطعاً على المجال  $[1, +\infty[$  ، فهي تقابل من  $[0, +\infty[$  نحو  $h([1, +\infty[) = [0, +\infty[$ .  
 ب- لدينا :  $\forall x \in [0, +\infty[ , \forall y \in [1, +\infty[ \quad y = h^{-1}(x) \Leftrightarrow x = h(y)$   
 إذن  $(x > 0 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0) \quad y - 1 = \pm \sqrt{e^x - 1} \Leftrightarrow e^x = (y - 1)^2 + 1 \Leftrightarrow x = \ln[(y - 1)^2 + 1]$   
 وبما أن  $y - 1 > 0$  فإن  $y - 1 = \sqrt{e^x - 1}$  إذن  $\forall x \in [0, +\infty[ \quad h^{-1}(x) = 1 + \sqrt{e^x - 1}$   
 (8) أ- لدينا  $f(x) = \ln[(x - 1)^2 + 1]$  إذن  $t = x - 1$  و  $f(t) = \ln(t^2 + 1)$  و  $dt = dx$ .  
 ومنه  $\int_0^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 \ln(1 + t^2) dt$

ب- نضع  $u(t) = \ln(1 + t^2)$  و  $v'(t) = 1$  فنجد  $u'(t) = \frac{2t}{1 + t^2}$  و  $v(t) = t$  إذن :

$$\int_{-1}^0 \ln(1 + t^2) dt = \left[ t \ln(1 + t^2) \right]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 \frac{2t^2}{1 + t^2} dt = \ln 2 - 2 \int_{-1}^0 \frac{t^2}{1 + t^2} dt$$

ج- لدينا  $\frac{t^2}{1 + t^2} = 1 - \frac{1}{1 + t^2}$  إذن  $\int_{-1}^0 \frac{t^2}{1 + t^2} dt = \int_{-1}^0 1 - \frac{1}{1 + t^2} dt = \left[ t - \arctg(t) \right]_{-1}^0 = 1 - \frac{\pi}{4}$

د- لتكن  $A$  مساحة الحيز المحصور بين المنحنى  $(C)$  ومحور الأفاصل والمستقيمين اللذين معادلتهما على التوالي

$$A = \int_{-1}^0 f(x) dx = \ln(2) - 2 \left( 1 - \frac{\pi}{4} \right) = \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2} \quad \text{إذن ، } x = 0 \text{ و } x = 1$$